



DIPARTIMENTO
DI MATEMATICA
GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO



VIII CONVEGNO DI.FI.MA. & VII GEOGEBRA DAY
Matematica e fisica nelle istituzioni: curriculum,
valutazione, sperimentazione

Relazioni fra segni per rappresentare il mondo

I luoghi geometrici e la staticità dei ponti

di Arianna Coviello, Giancarlo Scarsi e la 2E Liceo Scientifico Galileo Galilei

Progetto interdisciplinare: Disegno tecnico, Fisica, Matematica, Tecnologia digitale



L'attività che presentiamo è stata ispirata dalla costruzione
del nuovo ponte cittadino su Progetto
dell'architetto ***Richard Meier***, aderente ai Five Architects
(*Eisenman, Graves, Gwathmey Siegel, Hejduk e Meier*).
L'architetto newyorchese ha avuto importanti riconoscimenti
Pritzker Prize 84, Riba Royal Gold Medal 89
che hanno collocato la sua opera nella élite dell'architettura
mondiale.

Progetto interdisciplinare: Disegno tecnico, Fisica, Matematica, Tecnologia digitale



Dal punto di vista *funzionale* ci si trova di fronte all'architetto contemporaneo che più ha realizzato in questo campo: l'Atheneum a New Armony, il museo d'arte di Atlanta, il museo di arte decorativa a Francoforte, l'addizione a una struttura preesistente a Des Moines, la sistemazione urbana con sala assembleare e spazio espositivo a Ulm, la Getty Foundation a Los Angeles, il museo di arte contemporanea a Barcellona, di etologia ancora a Francoforte e il Jean Arp a Rolandswerth.

Progetto interdisciplinare: Disegno tecnico, Fisica, Matematica, Tecnologia digitale



Dal punto di vista *estetico*, per Meier la parola chiave è astrattismo. Il compito dell'arte non è raffigurare il mondo
ma

strutturare un insieme di relazioni tra segni senza significato che assumono valore per le reciproche relazioni e non per il loro singolare contenuto realistico

Obiettivi



1. Analizzare dal punto di vista statico lo schema progettuale del ponte Meier.
2. Analizzare dal punto di vista geometrico il ponte Meier
3. Confrontare diverse tipologie di ponti in relazione alla loro geometria

Conoscenze



1. Centro di massa/baricentro di corpi solidi estesi
2. Luoghi geometrici dal punto di vista euclideo e statico
3. Caratteristiche di sollecitazione: compressione, flessione, taglio
4. Statica di un arco
5. Tecnologie informatiche per rappresentare viste grafiche in 2D e 3D

Competenze



1. Calcolare il centro di massa di corpi estesi con profilo non regolare
2. Applicare il concetto di centro di massa all'analisi statica e geometrica delle strutture componenti il ponte
3. Applicare il concetto di luogo geometrico per analizzare il profilo dei cavi tiranti, delle loro proiezioni su piano orizzontale, di archi e triangoli presenti nella struttura del ponte
4. Utilizzare le caratteristiche di sollecitazione per eseguire un'analisi statica della struttura complessa del ponte e delle sue componenti
5. Utilizzare *Geogebra e Autocad* per rappresentare viste in 2D e 3D delle componenti principali della struttura del ponte

Psychomotor skills (Competenze psicomotorie):

Adaptation: Skills are well developed and the individual can modify movement patterns to fit special requirements.

Adattamento: Le abilità sono ben sviluppate e l'individuo può modificare i propri modelli di comportamento in base alle esigenze specifiche.

Origination: Creating new movement patterns to fit a particular situation or specific problem. Learning outcomes emphasize creativity based upon highly developed skills.

Origine: creazione di nuovi modelli di movimento per adattare una situazione particolare o un problema specifico. I risultati di apprendimento sottolineano la creatività basata su competenze altamente sviluppate.

Examples: Responds effectively to unexpected experiences.

Key Words: adapts, alters, changes, rearranges, reorganizes, revises, varies.

Esempi: risponde efficacemente a esperienze impreviste. Modifica l'istruzione per soddisfare le esigenze. Esegue un'attività seguendo percorsi non previsti. Si adatta, modifica, riorganizza, rivede

Key Words: arranges, builds, combines, composes, constructs, creates, designs, initiate, makes, originates.

Esempi: Sviluppa una nuova teoria. Crea una nuova routine. Parole chiave: organizza, costruisce, unisce, compone, crea, disegna, inizia, fa, origina.

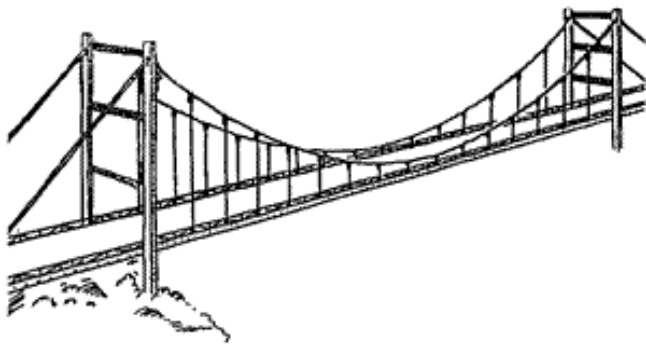
Quale forma hanno i ponti?

Le forme dei ponti ad arco hanno strutture principalmente riconducibili alla forma di una *parabola* o di una *catenaria*, la curva che si ottiene fissando a due estremi una catena (o una fune omogenea), soggetta alla sola forza di gravità.



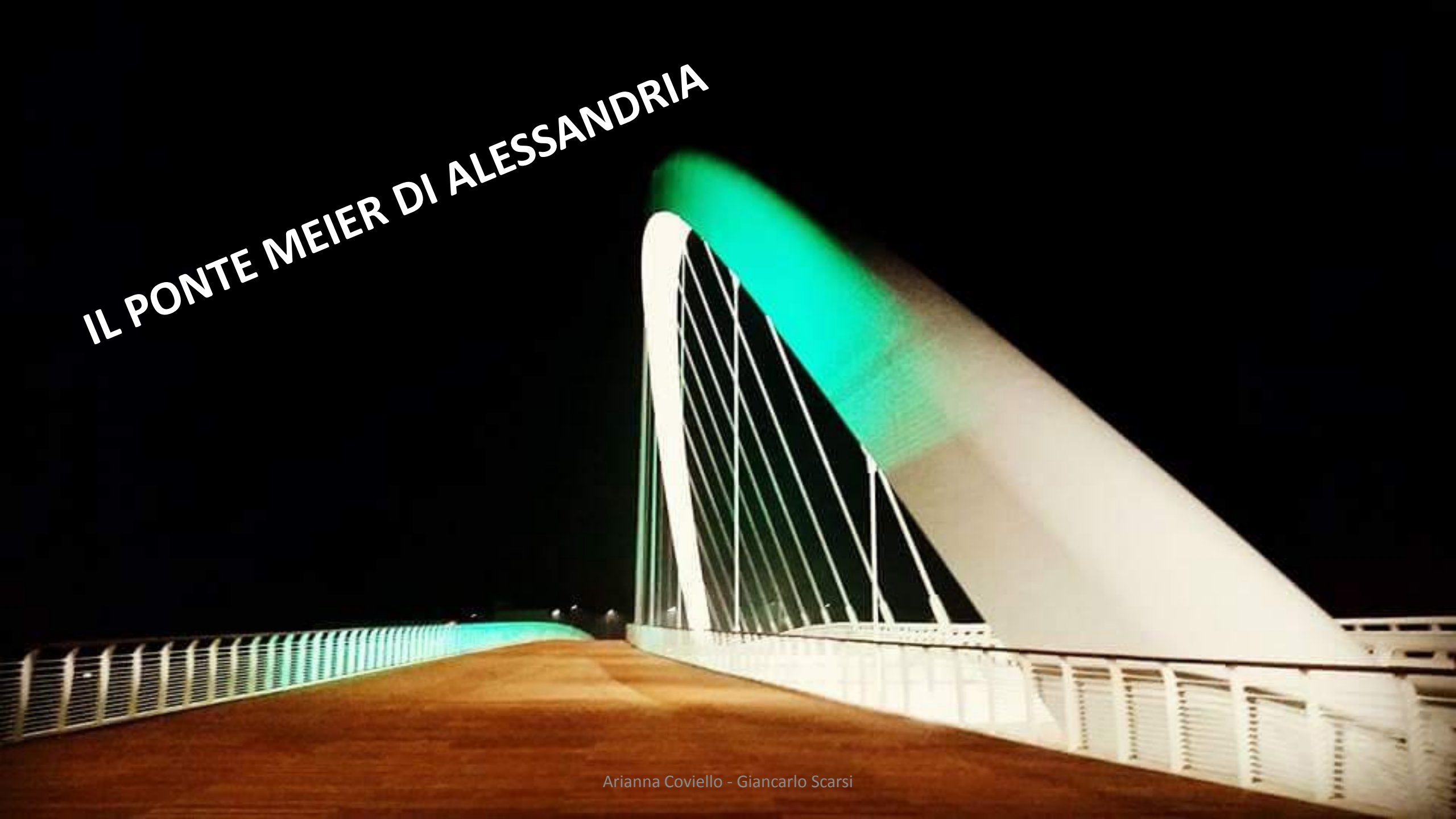
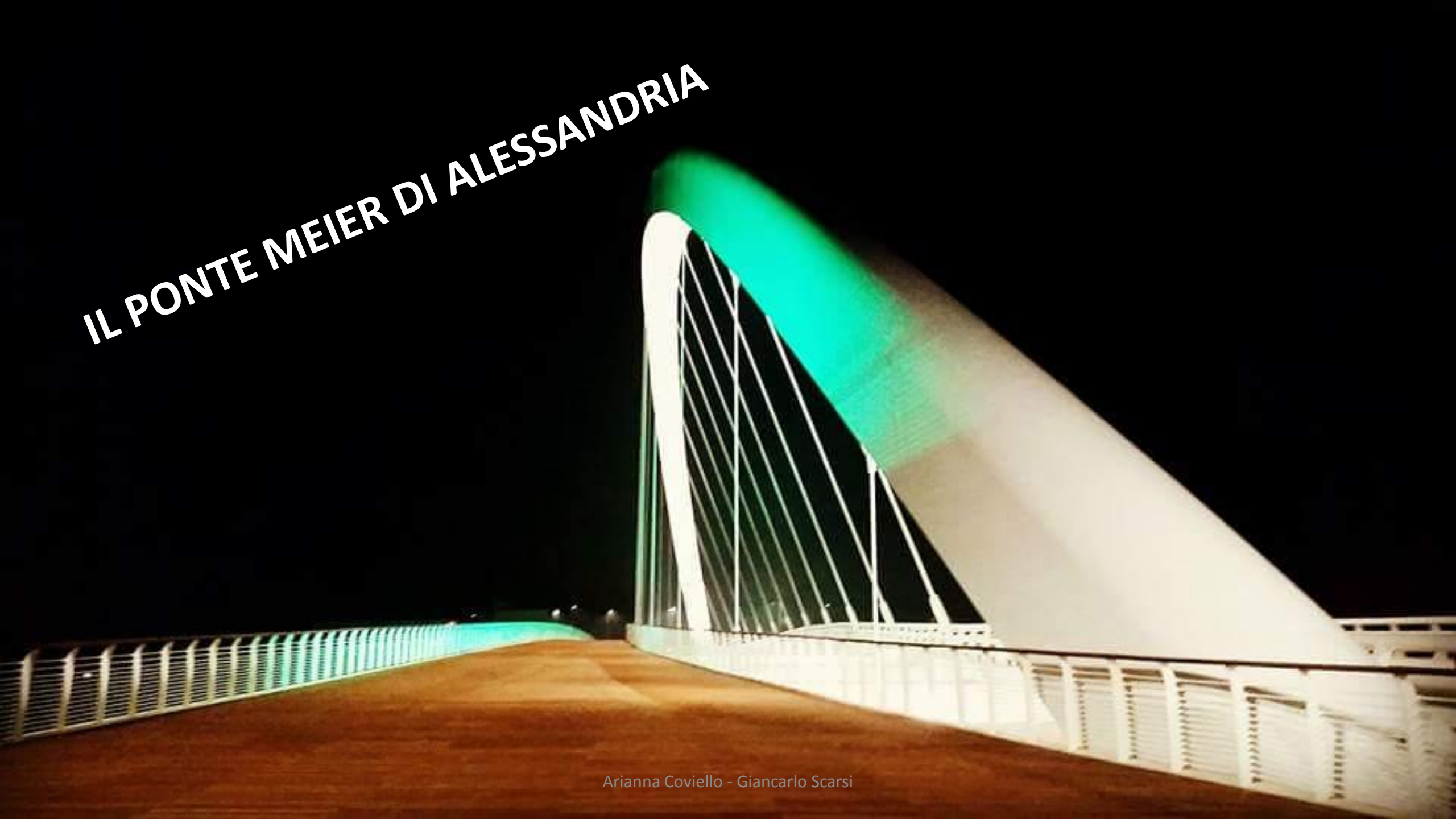
Catenarie o parabole?

La **parabola** compare nei ponti sospesi la cui struttura è retta dall'alto attraverso tiranti sostenuti da alte torri verticali



Nelle strutture portanti dei ponti è utilizzata la **catenaria “rovesciata”**





IL PONTE MEIER DI ALESSANDRIA

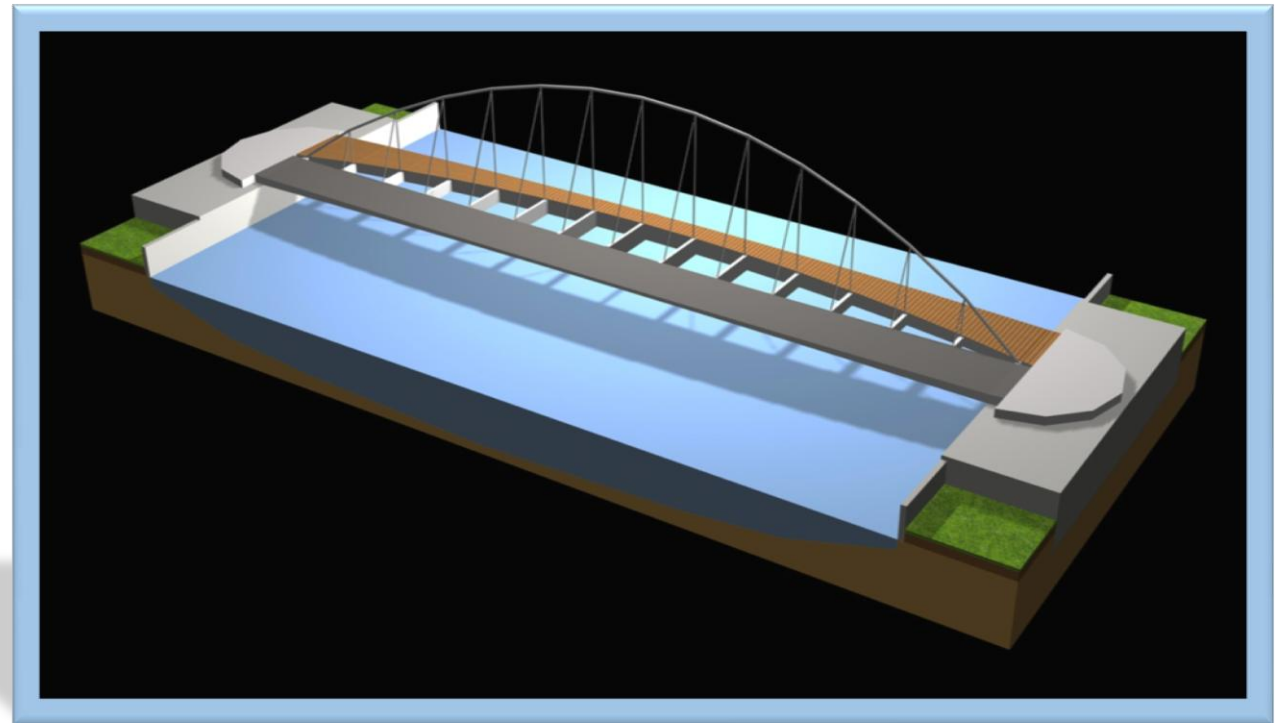
PONTE SOSPESO



Il ponte Meier prevede un'unica campata di 185,08 m ed è composto da tre elementi principali: l'arco, inclinato di 21° rispetto alla verticale, la piattaforma destinata al transito pedonale e quella destinata al transito veicolare. Le due piattaforme sono appese all'arco inclinato tramite tiranti in acciaio e risultano curvate attorno ad uno spazio vuoto centrale a “forma di mandorla”.

SOSTEGNO DATO DAI TIRANTI

Il termine **tirante** in architettura indica un elemento strutturale, spesso di metallo, utile a sostenere il peso dell'impalcato. Dal punto di vista strutturale viene chiamato tirante un elemento che lavora, come si intuisce dal termine, a trazione semplice.

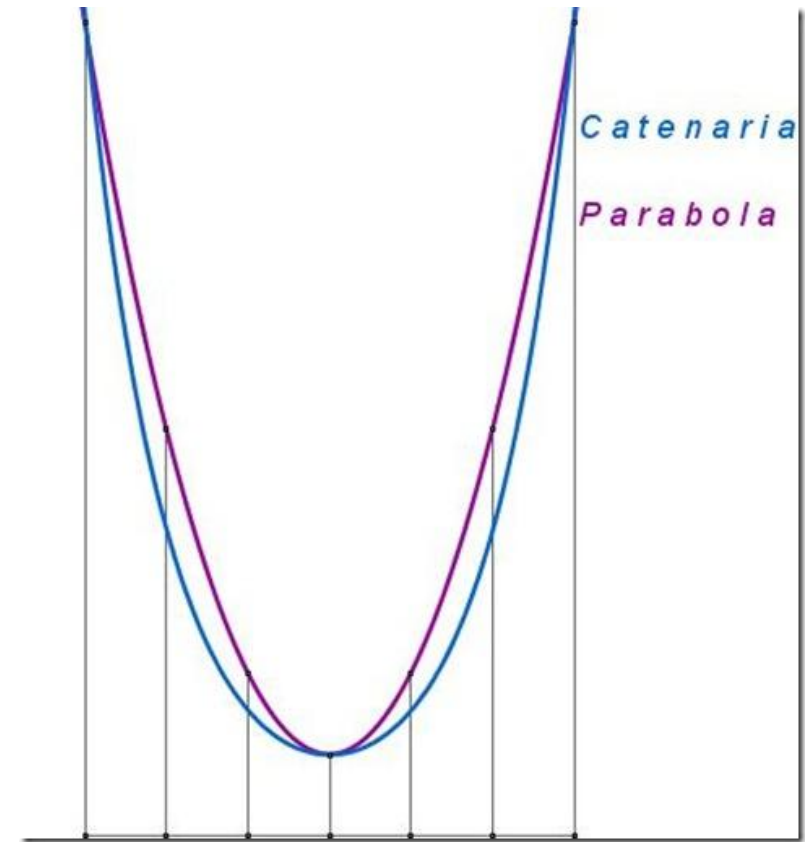


Analisi geometrica del Ponte Meier



Studio geometrico: un po' di storia...

La confusione tra le due curve, parabola e catenaria, è storica e in realtà legittima, visto che lo stesso Galileo Galilei si era sbagliato al riguardo; ci vollero gli studi di Huygens, Leibnitz e dei fratelli Bernoulli per ottenere, nel 1691, l'equazione matematica di una catenaria



La catenaria

*La catenaria è luogo geometrico dei baricentri degli
elementi componenti una fune
(baricentri punti di applicazione della forza peso)*

Di fondamentale importanza è essere consapevoli della differenza tra la gestione del calcolo del baricentro di un insieme continuo o di un insieme discreto (sottoinsiemi propri o impropri di \mathbb{N} e \mathbb{Z}).

La catenaria

La nostra idea didattica, in coerenza alla sua declinazione in un secondo anno di Liceo Scientifico, è stata quella di immaginare un arco di materiale omogeneo (acciaio), come insieme di conci relativamente ai quali calcolare il baricentro



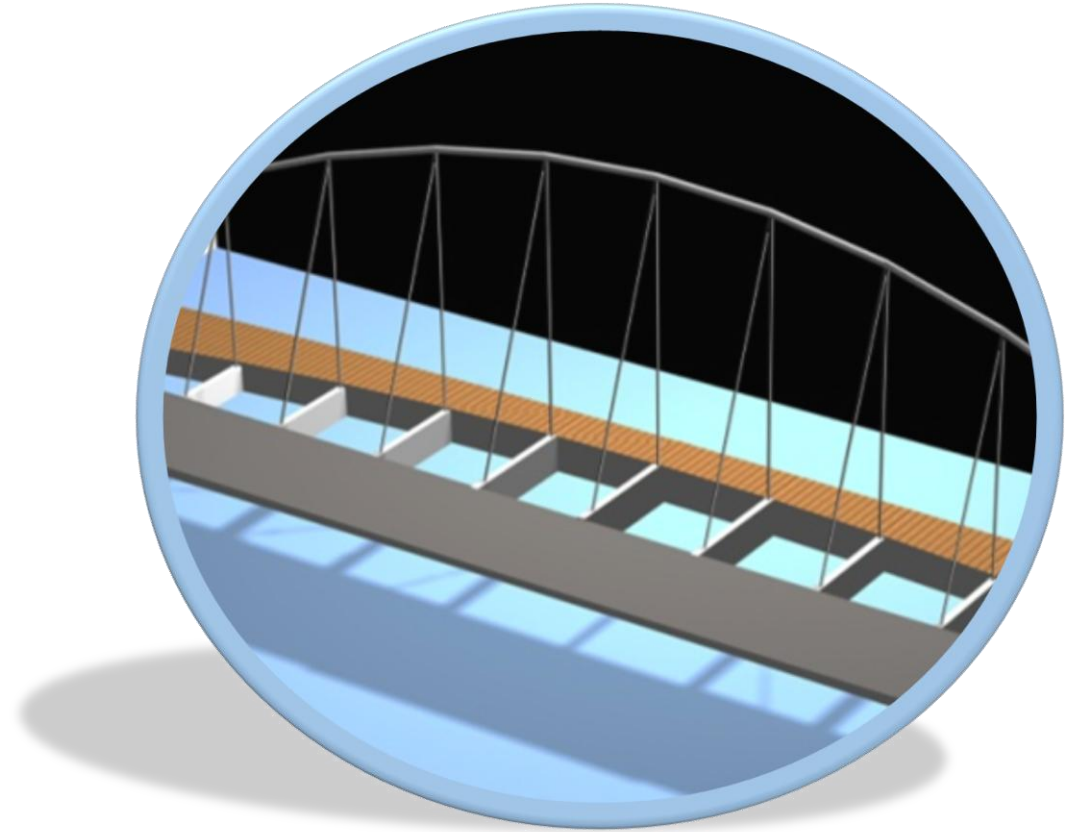
La catenaria

E una volta individuati i baricentri,
...sperare di trovare una catenaria



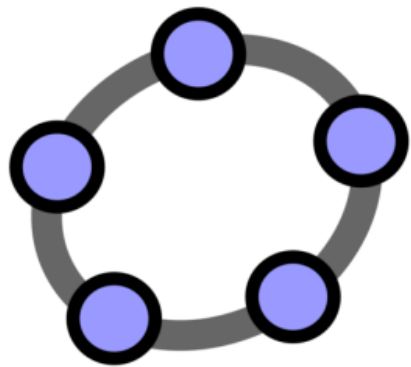
La catenaria

Il numero dei conci
individuati è in coerenza al
numero di coppie di
tiranti posti a sostegno
della passerella pedonale
e della piattaforma
veicolare

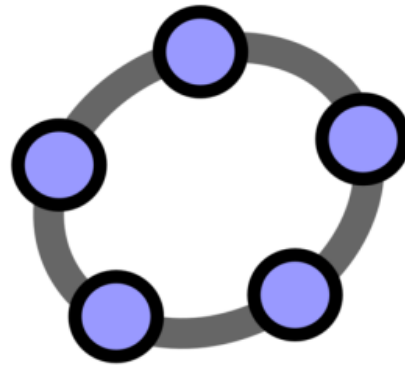


Studio della catenaria come luogo geometrico in 2D

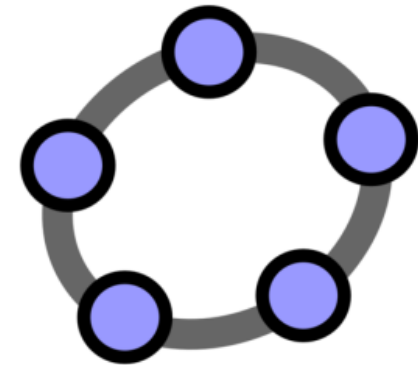
- Uso del software Geogebra per lo studio del Luogo



Catenaria come luogo dei baricentri
Delle distanze tra due funzioni
esponenziali
File 1



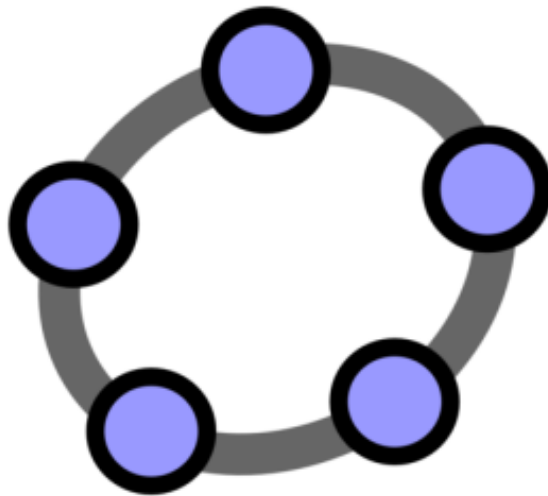
Equazioni parametriche
Catenaria
File 2



Parabola genera catenaria
File 3

...e in 3D

- Uso del software Geogebra per lo studio del Luogo



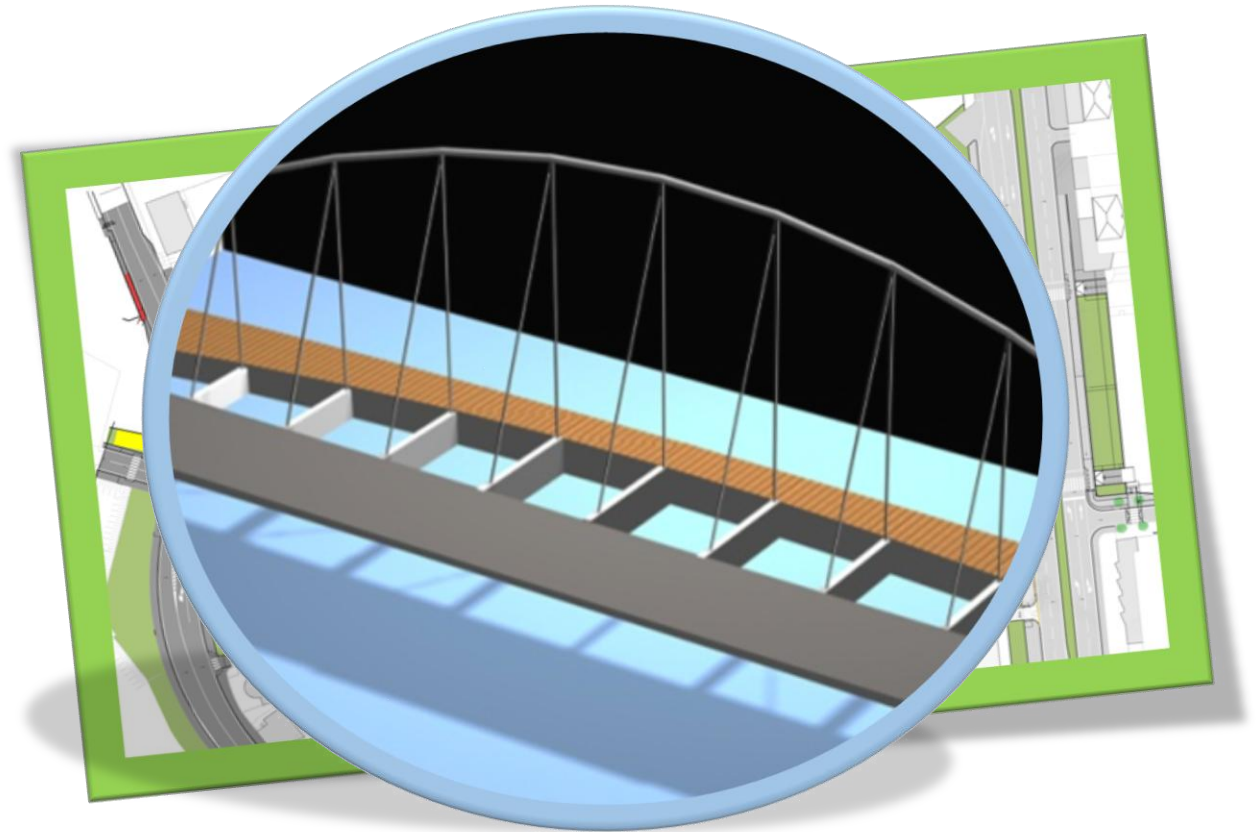
La catenoide

Analisi statica del Ponte Meier



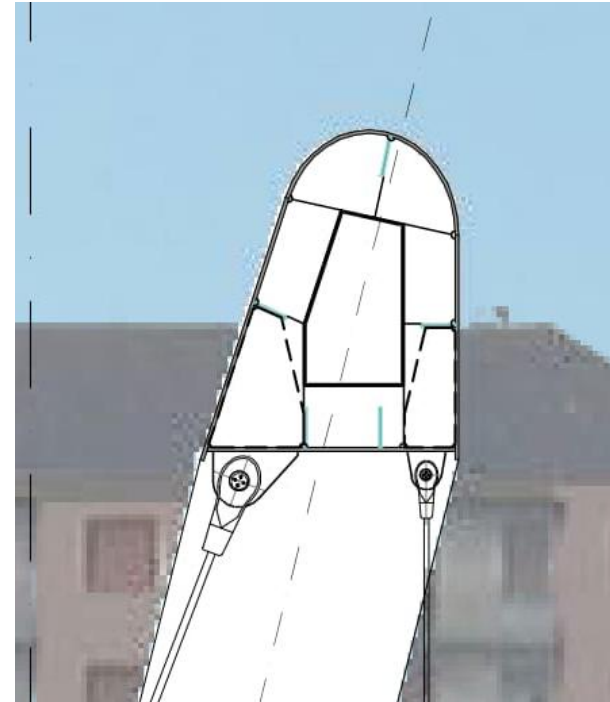
Resistenza del materiale + resistenza della forma

Lo spazio centrale è vuoto ed occupato da puntoni che, interconnessi con i tiranti, formano un triangolo al quale viene affidato il compito di sopportare gli effetti rotazionali dovuti al carico sbilanciato, sfruttando in questo modo la proprietà del triangolo di essere una figura geometrica indeformabile



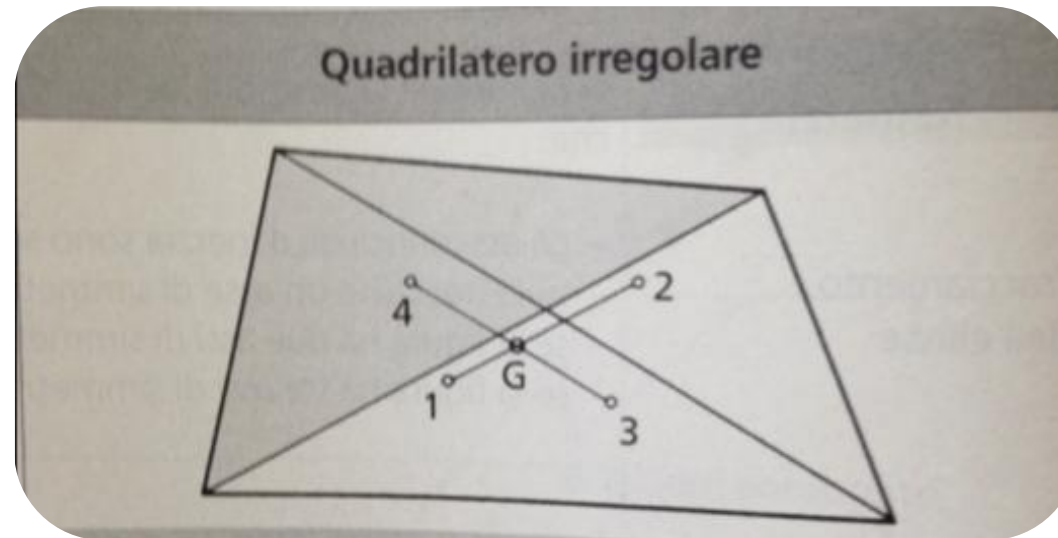
LABORATORIO DI INFORMATICA

Determinazione del baricentro di un sistema di forze relative alla sezione verticale della chiave dell'arco



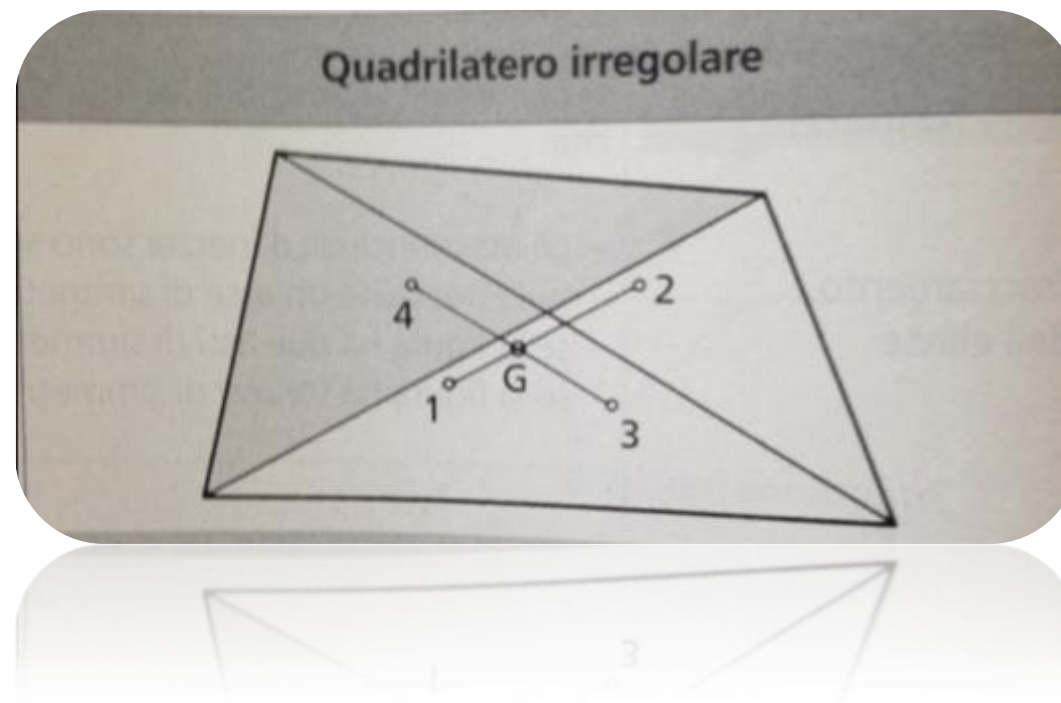
Metodo grafico: protocollo di costruzione

1. Individuare il baricentro dei poligoni in cui si scompone la sezione (quadrilateri irregolari e una semicirconferenza)



*Si uniscono i baricentri dei due triangoli in cui il quadrilatero viene diviso a una delle sue diagonali, indi i baricentri
Dei due triangoli in cui viene diviso dall'altra diagonale.
Il baricentro del quadrilatero è il punto d'intersezione delle due congiungenti*

Macro per costruire il baricentro



2. Calcolare le aree dei quadrilateri con la funzione ggb dedicata (fig 2-3).

Questo permetterà di rappresentare, nel baricentro precedentemente trovato di ogni quadrilatero, una forza risultante proporzionale alla sua area (la costante di proporzionalità si scelga in funzione delle dimensioni del disegno, scegliamo come costante $1/4$)

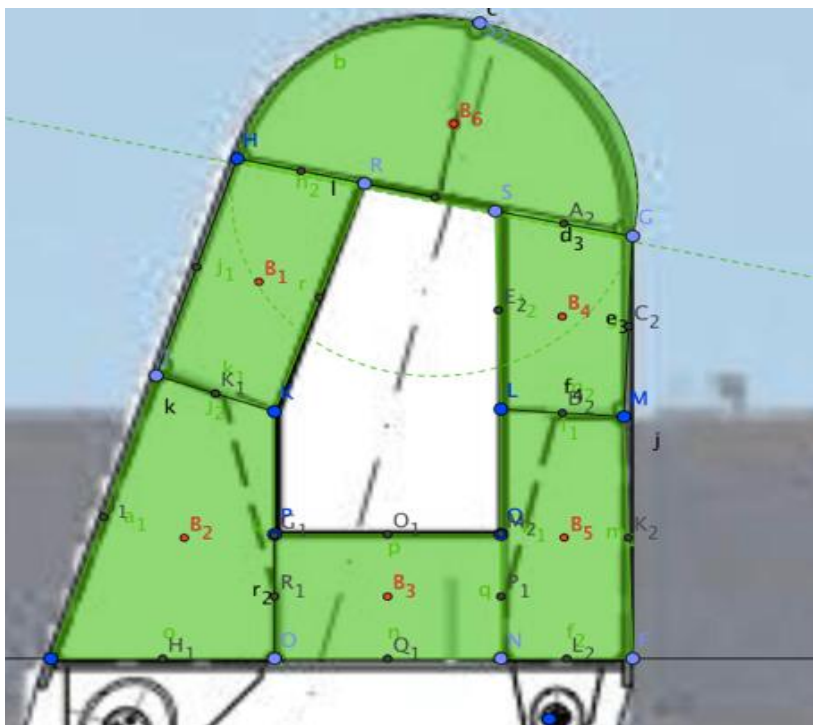


Figura 2

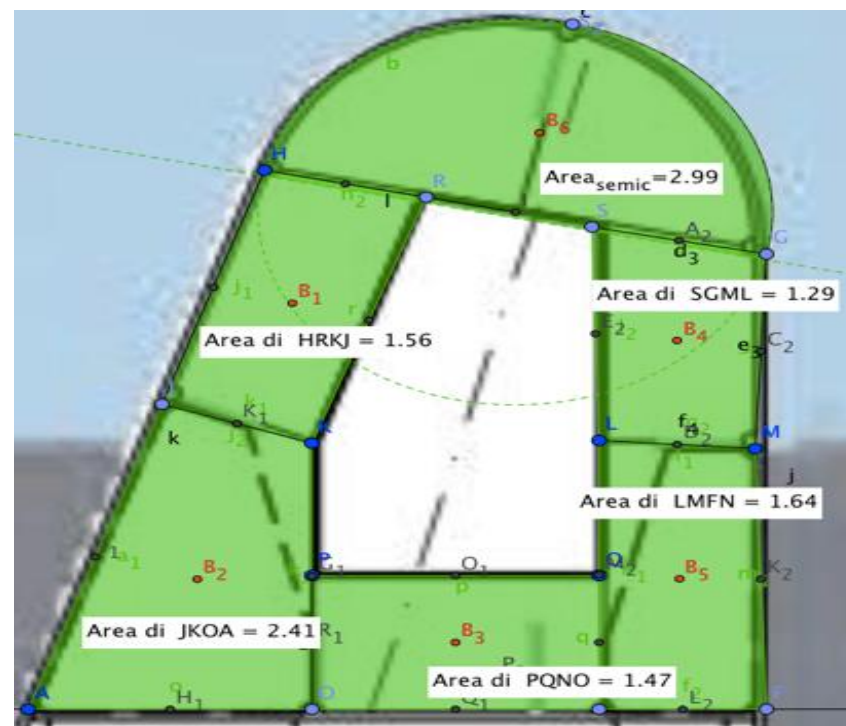


Figura 3

Forze risultanti proporzionali alle aree dei poligoni fig. 4 - 5

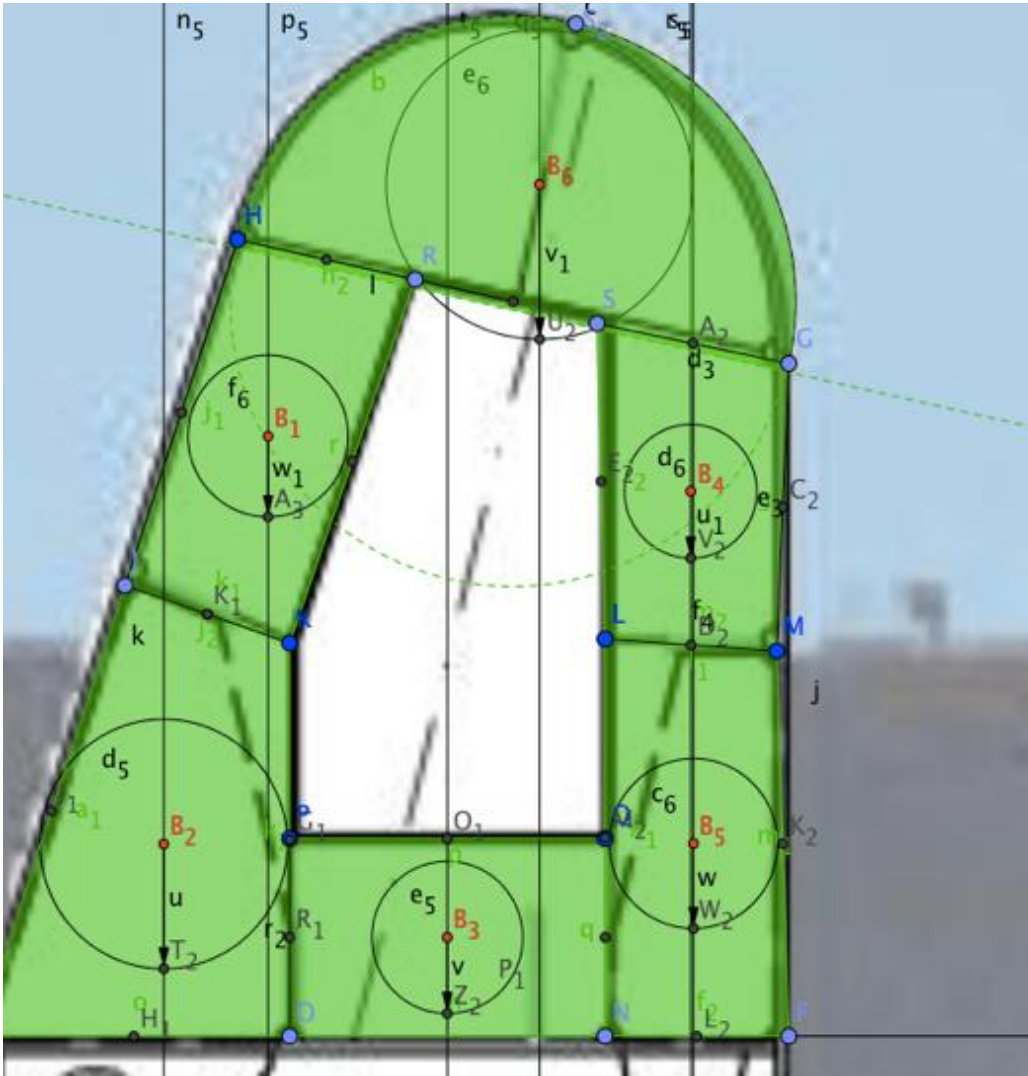


Figura 4

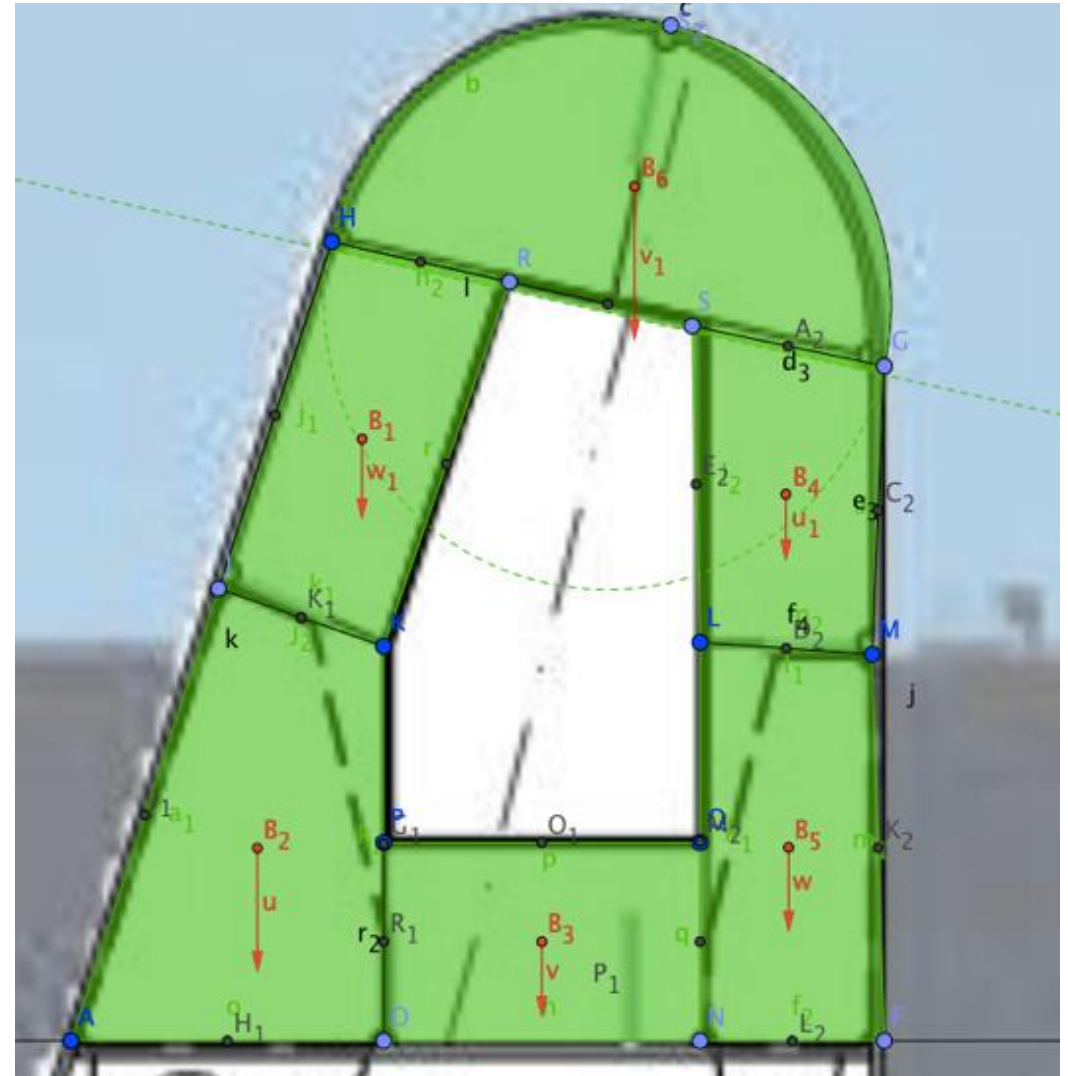


Figura 5

Costruire il poligono delle forze ordinandole da sinistra a destra

File 5 ggb: protocollo costruzione

5. Scegliere un punto esterno (POLO) alle forze in posizione più o meno baricentrica
6. Unire il POLO con gli estremi di ogni vettore (fig 5)
7. Tornare alla figura e disegnare le rette d'azione delle forze (verticali)
8. Riportare in sequenza, a partire da un punto della prima retta d'azione, linee parallele ai raggi individuando volta per volta il loro punto di intersezione con le rette d'azione risultanti dei quadrilateri, punto che diventa di applicazione per la parallela successiva. Si definisce così l'asse verticale su cui giace il Baricentro della sezione
9. Ripetere la costruzione sulle risultanti ruotate di 90° (orizzontali). Si definisce così l'asse orizzontale su cui giace il baricentro della sezione
10. Il punto di intersezione dei due assi è il BARICENTRO cercato (fig.7 - 8)

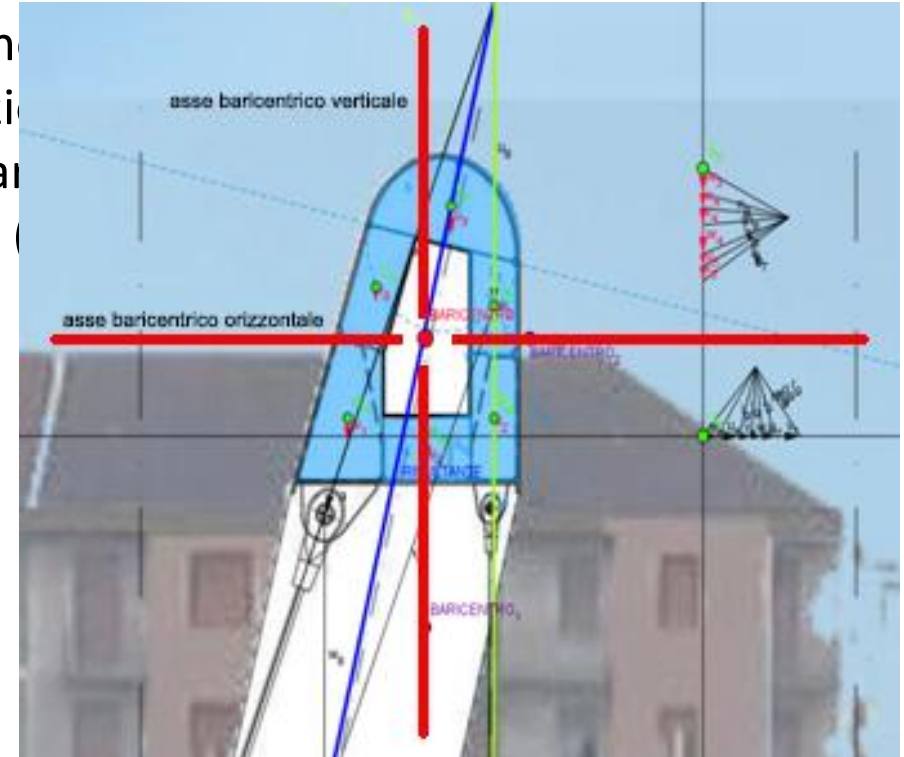
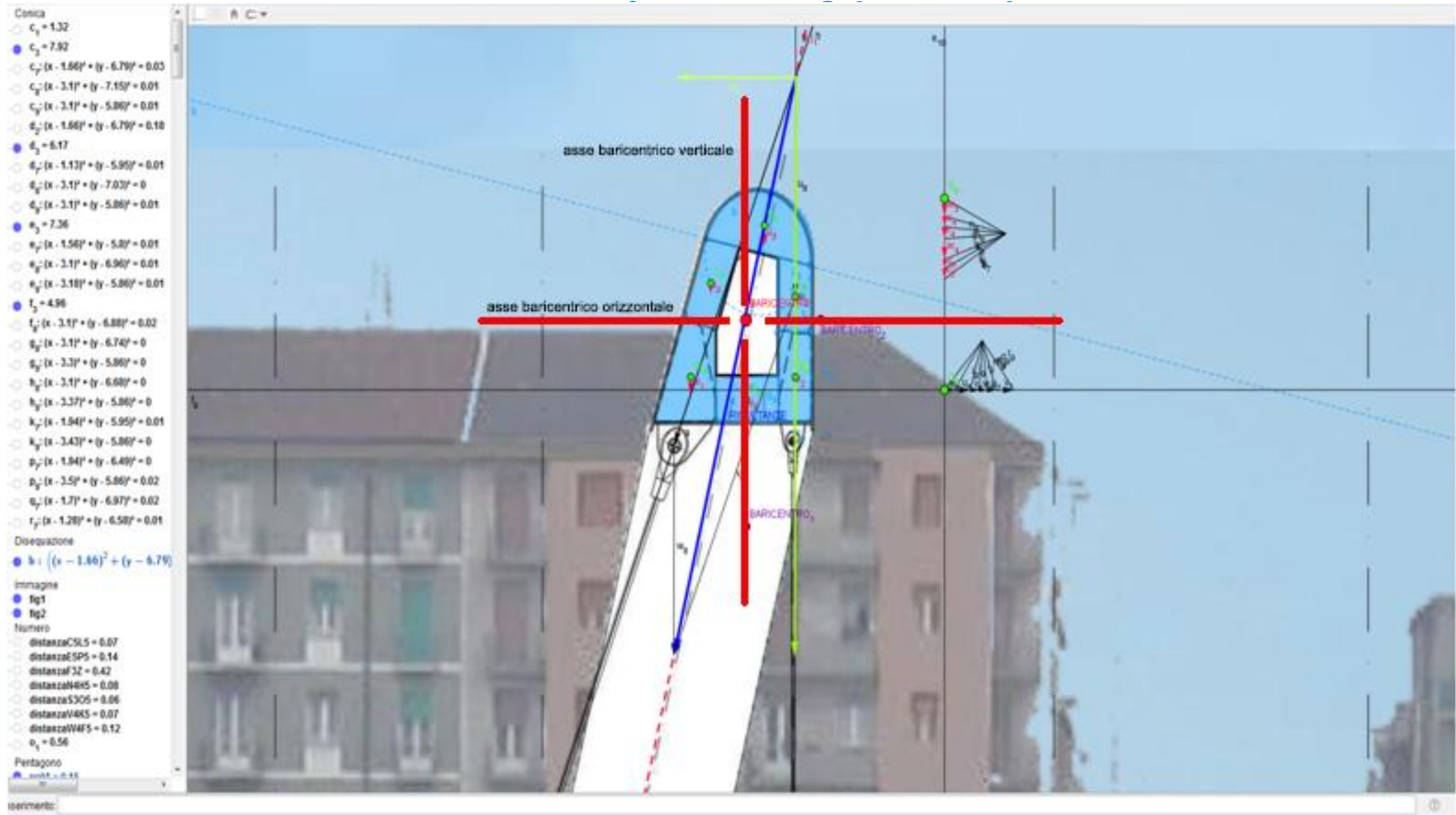


Figura 8

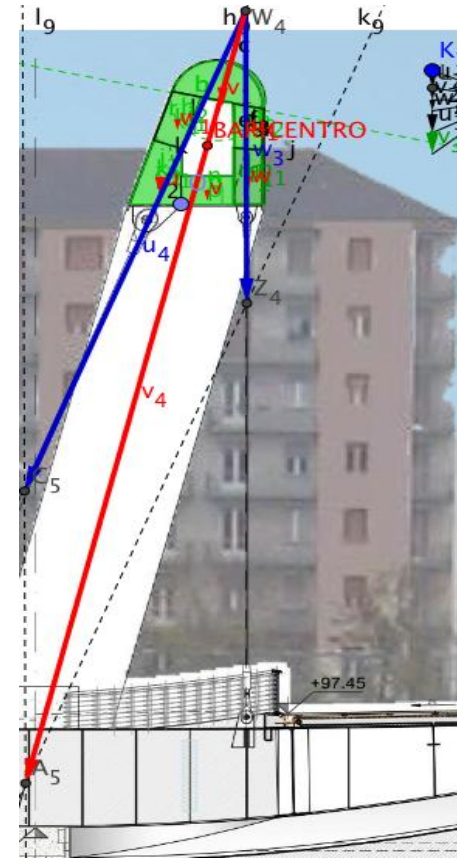


La posizione del baricentro così individuata, si trova all'interno della parte cava della sezione verticale dell'arco. Per ogni sezione ricavata da ciascuna coppia di tiranti troveremo un baricentro posizionato sempre all'interno della parte cava. Componendo le forze peso che agiscono su ogni coppia di tiranti noteremo che la retta d'azione della forza risultante è anche l'asse di simmetria dell'arco. Unendo i successivi baricentri otterremo una curva che definisce il profilo dell'arco.

RISULTATI

La retta d'azione della forza risultante
giace sull'asse di simmetria dell'arco!

Il baricentro giace sull'asse di
simmetria dell'arco!

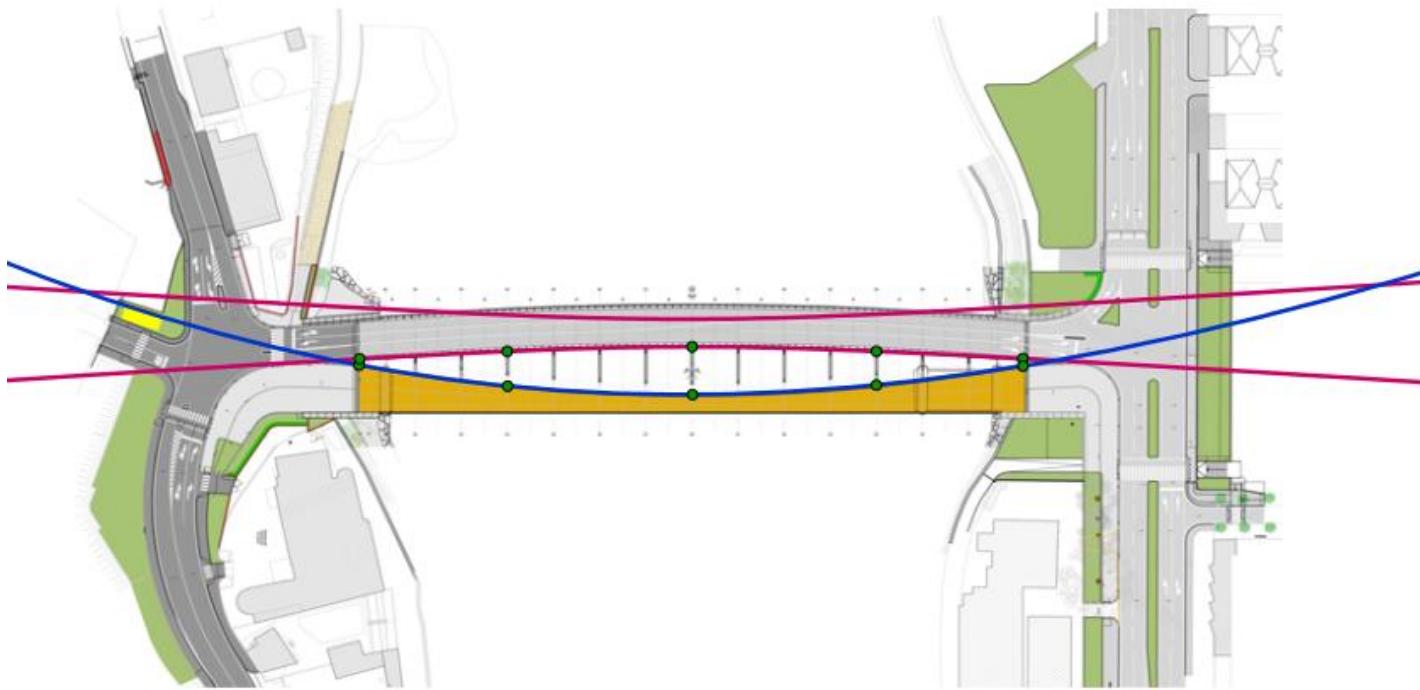


Una volta individuati i baricentri...a quale curva appartengono?



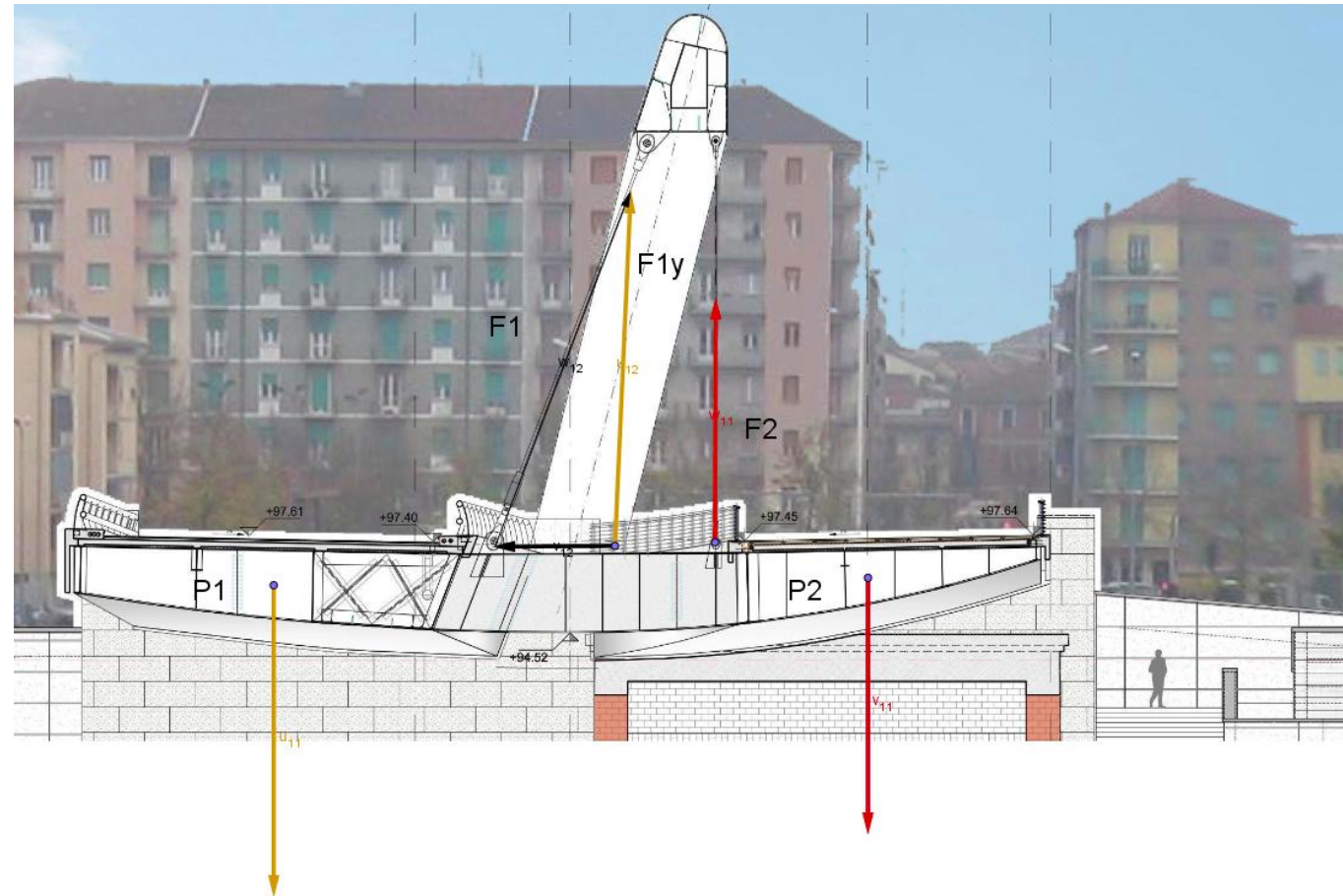
File 6 ggb

Non contenti, ancora equazioni...



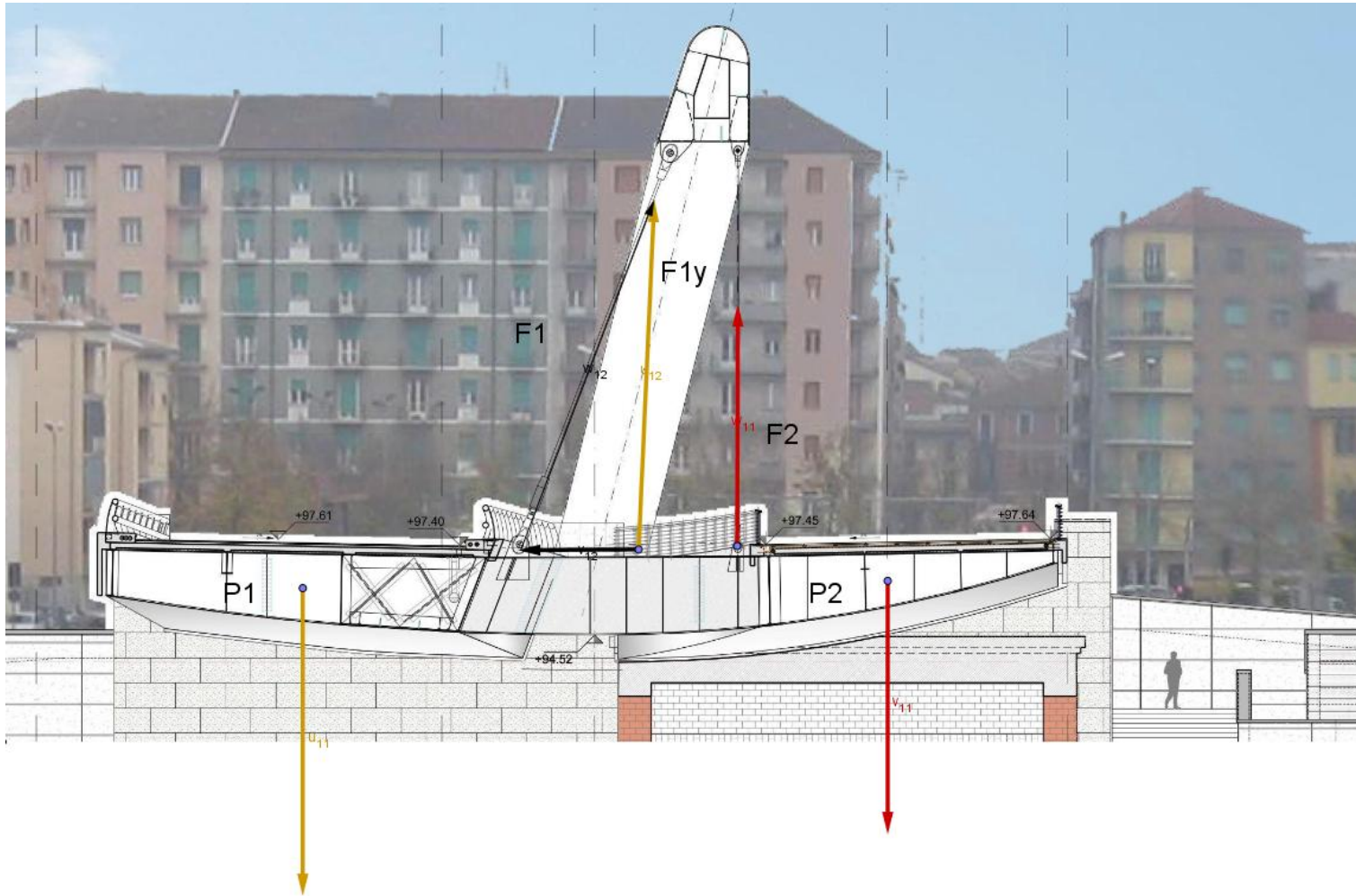
File 6a

Analisi statica dei momenti e delle Forze applicate e conclusioni



File 7

La forza peso di ogni passerella viene controbilanciata da una forza impressa da ciascun tirante



$$\sum Fy = 0$$

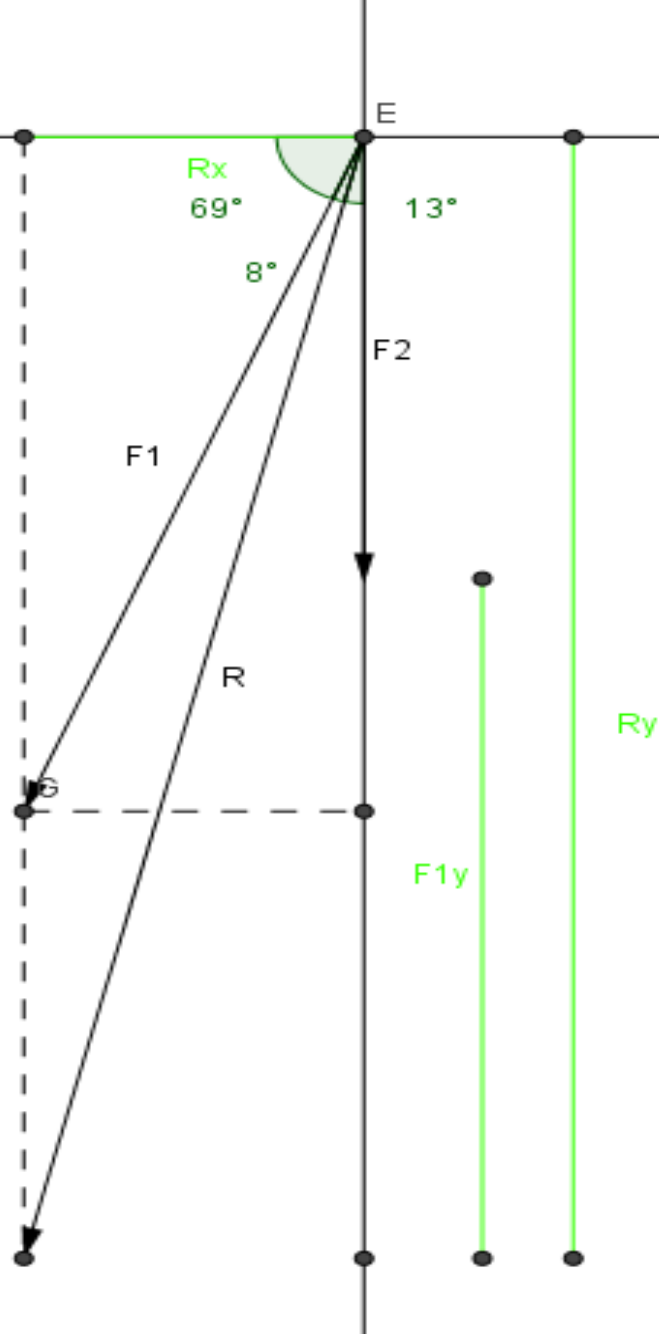
$$\rightarrow + \rightarrow + \rightarrow + \rightarrow = 0$$

$$\begin{matrix} P_1 & P_2 & F_{1y} & F_2 \\ \rightarrow & + & \rightarrow & = - \left(\begin{matrix} \rightarrow & + & \rightarrow \\ F_{1y} & & F_2 \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

$$P_1 + P_2 = F_{1y} + F_2$$

$$P_1 + P_2 = R_{ty}$$

Ovvero la componente verticale della risultante delle forze dei tiranti è uguale e contraria alla componente verticale della somma delle forze peso (condizione di equilibrio delle forze verticali)



$$\begin{aligned} F_2 &= 10 \\ F_{2y} &= 10 \\ F_{2x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} \\ R_x &= R \cos(77) \\ F_{1x} &= F_1 \cos(69) \\ R \cos(77) &= F_1 \cos(69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y &= F_{1y} + 10 \\ R_y &= R \sin(77) \\ F_{1y} &= F_1 \sin(69) \\ R \sin(77) &= F_1 \sin(69) + 10 \end{aligned}$$

$$R = F_1 \cos(69) / \cos(77)$$

Andiamo a sostituire R della seconda equazione
 $[F_1 \cos(69) / \cos(77)] \sin(77) = F_1 \sin(69) + 10$

Dopo avere eseguito i calcoli troviamo $F_1 = 16,077$
 e $R = 25,691$

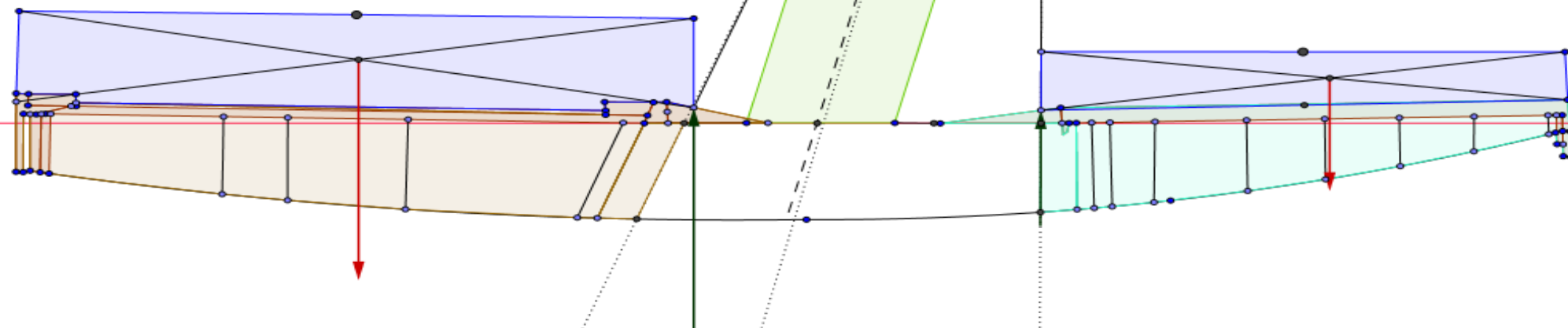
3.

LEGENDA

blu=carichi relativi alle piattaforma stradale e la passerella pedonale
 rosso= forza peso
 verde scuro= reazioni vincolari
 verde chiaro=arco in proiezione
 rosa=arco in sezione
 marrone=piattaforma stradale
 azzuro= passerella pedonale

La sommatoria dei
 momenti calcolata rispetto
 ad un qualsiasi punto
 ipotetico Z è nulla
 (condizione di equilibrio
 alla rotazione).

$$\sum M_z = 0$$



ESEMPIO

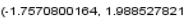
Assegnando valore positivo ai momenti che ruotano in senso orario: posizioniamo il punto Z nel punto di applicazione del tirante F2 e otteniamo la seguente equazione di equilibrio:

$$-(P_1 * S_1Z) + (F_1 * AZ) + (F_2 * 0) + (P_2 * S_2Z) = 0$$

Lo stesso procedimento si può applicare per qualsiasi punto del sistema ottenendo sempre un valore nullo. Invece calcolando il momento rispetto allo stesso punto Z troveremo un valore che ci permetterà di dimensionare la trave in base alla resistenza del materiale utilizzato

ESEMPIO

$$M_z = |F_2 * S_2Z|$$

$(-7.9338994474, 4.2212219084)$ 



Grazie dell'attenzione!

La 2E del Liceo Scientifico G. Galilei

Alessandria

Arianna Coviello - Giancarlo Scarsi